Federico Rodriguez Bravo

Algebra lineal

Ejercicios del libro de Bernard Kolman,sexta edicion

Tema:Bases y Dimension

13)Considere el siguiente subconjuto de P_3

$$S = \{t^3 + t^2 - 2t + 1, t^2 + 1, t^3 - 2t, 2t^3 + 3t^2 - 4t + 3\}$$

Determinar una base para el espacio $W = \operatorname{gen} S$. Cual es su dimension?

El metodo que tomare es el de la forma que es linealmente independiente, se toma este por que no se sabe si genera una base.

Se llva a la forma q S es linealmente independiente de la forma:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_n v_n = 0$$

$$\alpha_1(t^3 + t^2 - 2t + 1) + \alpha_2(t^2 + 1) + \alpha_3(t^3 - 2t) + \alpha_4(2t^3 + 3t^2 - 4t + 3)$$

Se hacen los productos:

$$(\alpha_1 t^3 + \alpha_1 t^2 - 2\alpha_1 t + \alpha_1) + (\alpha_2 t^2 + \alpha_2) + (\alpha_3 t^3 - 2\alpha_3 t) + (2\alpha_4 t^3 + 3\alpha_4 t^2 - 4\alpha_4 t + 3\alpha_4)$$

Se lleva a un sistema homogeneo:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 t^3 + \quad + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^3 = 0 \\
&\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t^2 + \qquad + 3\alpha_4 t^2 = 0 \\
&-2\alpha_1 t + \quad - 2\alpha_3 t - 4\alpha_4 t = 0 \\
&\alpha_1 + \alpha_2 + \qquad + 3\alpha_4 = 0
\end{aligned}$$

Luego se lleva a una matriz para volverlo de la forma escalonada reducida por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se hace gauss Jordan a la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (2) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (3) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las operaciones fueron asi:

1) F1-F2, 2F1+F3, F1-F4.

2) -F2.

3) F2-F4

La matriz quedo asi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que los 1 principales como estan en las dos primeras filas los dos primeros alfas son las bases de este sistema y serian:

$$\{t^3 + t^2 - 2t + 1, t^2 + 1\}$$

Es de dimension 2 por que tiene dos elementos nada mas.